辅导篇

关于拉格朗日中值定理的证明*

谢效训　(枣庄师专数学系, 山东枣庄, 277160)

一般高等数学教材上, 大都是用罗尔定理证明拉朗日中值定理, 直接给出一个辅助函数, 把拉格朗日定理的证明归结为用罗尔定理, 证明的关键是给出一个辅助函数。怎样构作这一辅助函数呢? 我们来看:

罗尔定理: 函数 $f(x)$ 满足在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)$, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=0$ (如图 1)。

拉格朗日定理: 若 $f(x)$ 满足在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (如图 2)。

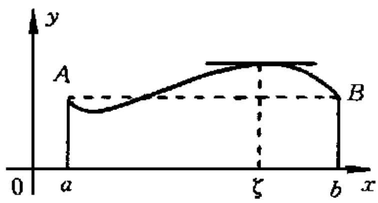

图 1

图 2

比较定理条件, 罗尔定理中端点函数值相等, $f(b)=f(a)$, 而拉格朗日定理对两端点函数值不作限制, 即不一定相等。我们要作的辅助函数, 除其他条件外, 一定要使端点函数值相等, 才能归结为罗尔定理来证明。

一、比较图 1 和图 2, 显然, 作辅助函数 $F(x)$ 等于 $f(x)$ 减去弦 AB 的函数, 可使 $F(x)$ 满足 Rolle 定理条件 $F(a)=F(b)$。

(1) 弦 AB 的函数 $y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

这是已知点 $(a, f(a))$, 斜率 $k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的点斜式直线方程。

辅助函数 $F(x)=f(x)-y$ 即 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$　　(1)

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, $F(b)=F(a)=0$ 的两端求导即得拉格朗日中值公式。

(2) 若以 $(b, f(b))$ 为已知点, 斜率仍为 $k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

弦 AB 的函数 $y=f(b)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$

作辅助函数　$F(x)=f(x)-y$ 即 $F(x)=f(x)-f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$　　(2)

* 收稿日期: 2001—03—05。

$F(x)$满足罗尔定理条件，两边求导可得出拉格朗日定理。

(3) 若以$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(f)}{2}\right)$为已知点，斜率 $k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

弦AB 的函数 $y=\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$

作辅助函数 $F(x)=f(x)-y$，即 $F(x)=f(x)-\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$ (3)

仅以(3)为例证明拉格朗日定理：

因为 $F(x)=f(x)-\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$

所以 $F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且

$$F(a)=f(a)-\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)=0$$

$$F(b)=f(b)-\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)=0$$

所以 $F(x)$满足罗尔定理条件，(3)式两端对 x 求导得

$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$(a,b)$内至少存在一点 ξ，使

$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{2}=0$

即 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $a<\xi<b$

二、(1) 若令辅助函数 $F(x)$等于 $f(x)$减去$[a,b]$上 ΔABC 内动线段 EF，就能使 $F(x)$满足罗尔定理条件，如图 3：

$AB: y_1=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$AC: y_2=f(a)$

$[a,b]$上 ΔABC 内 $|EF|=y_1-y_2=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

辅助函数 $F(x)=f(x)-(y_1-y_2)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ (也可以看做辅助函数(1)的曲线再向上平移 $f(a)$的高度而得。) 则 $F(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，且

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a)$$

$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a)$$

所以 $F(a)=f(a)=F(b)$满足罗尔定理条件。

$F(x)$两端求导，定理得证。

(2) 若作辅助函数 $F(x)$等于 $f(x)$加上$[a,b]$上 ΔABD 内动线段 GH 的长度，如图 4。

$DB: y_1=f(b)$

$AB: y_2=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

GH 的长度 $y=y_1-y_2=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

作辅助函数

$$F(x)=f(x)+y=f(x)+f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

(下转第 48 页)

函数论也形成于此时, 超穷基数理论和集合论的建立则是 19 世纪 70 年代, 拓扑学出现于 19 世纪末, 泛函分析到 20 世纪 30 年代成了独立的分支等等。合理的分法, 应当是根据数学思想发展本身所显现出来的阶段性来进行。这样分段的结果, 不可能与世纪的交替相吻合, 17 世纪中期以后进入变量时期, 19 世纪前期由于非欧几何、复变函数论、微积分的奠基(指 Cauchy 的工作)等的建立, 群论的提出等又形成新的时期, 这个时期所研究的主要是各种变换。

当然作者也可以说这本书的安排不是给数学和数学思想划分发展阶段, 而是为了写作上的方便这样做的。但是, 这样做无论如何是不好的。

书中还有其他一些缺点, 例如社会背景讲的少一些, 过份强调了数学家个人的作用等等, 我们不再赘述了。

虽然这本书存在一些缺点, 但优点还是主要的, 不失为一本较好的书。我的评论也只是一些不成熟的看法, 仅供阅读该书的读者们参考。

本书的中文译者准确地将其译成了中文, 给中国广大读者提供了阅读上的方便, 这是他们的贡献。在对原书进行评价时, 不能不提到译者。

参 考 文 献

1 А Н Колмгоров Математика Большая советская энчелопедия том 26 1954 464- 483
2 А П Юшкевич Об Оаной Задаuи теории Чисел Русских математических рукописах XVII в Труды института истории естесувознания и техники том 17, 1957, 300—311
3 Henri Bernard Matteo Ricci's Scientific Contribution to China, Peiping, 1935, p. l
4 丁超五 科学的易, 271 页
5 Y. Mikami(三上义夫者). The Development of Mathematics in China and Japan. 1913, Leipzig pp. 141- 143
6 拉普拉斯 宇宙体系论 上海: 上海译文出版社, 1978, 407—410, 466—467
7 安藤洋美 古典概率论史 科学史研究 1978, 17(11), No. 126, 65—74

(上接第 34 页)

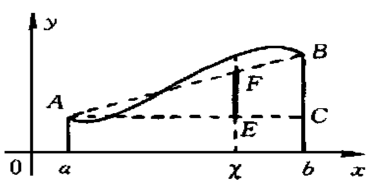

图 3

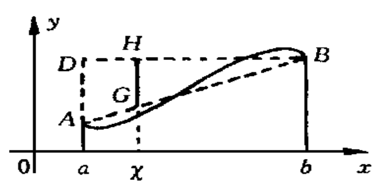

图 4

从而 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $F(a) = f(b) = F(b)$, 满足罗尔定理条件, 两边求导, 用 ξ 代 x 定理得证。

对于第二类情况还可以分别以 $(b, f(b))$, $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$ 等为已知点, 斜率 $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 作弦 AB 的函数, 还可作多种辅助函数。由此可知拉格朗日中值定理证明中的辅助函数可以有许多种作法。同学们从中能受到什么启发呢?

参 考 文 献

[1] 赵根榕. 中值定理综述. 曲阜师范大学学报, 1987. 2, 44—52